

作用于微分形式的复合算子 $T \circ D \circ G$ 的高阶可积性

赵鹏飞, 毕淑娟, 刘振杰
(哈尔滨学院 信息工程学院, 哈尔滨 150080)

摘要:利用微分形式的 Poincaré-Sobolev 不等式证明了当 $1 < p < n$ 时复合算子 $T \circ D \circ G$ 的高阶 L^p 可积性, 然后进一步讨论了 $p \geq n$ 的情形, 获得了复合算子的高阶范数估计, 并利用该结果对 L^p 可积微分形式证明了局部加权范数不等式成立。

关键词:复合算子; 高阶可积性; 微分形式

DOI:10.15938/j.jhust.2023.03.018

中图分类号: O175.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)03-0144-05

Higher Integrability of the Composite Operator $T \circ D \circ G$ for Differential Forms

ZHAO Pengfei, BI Shujuan, LIU Zhenjie

(School of Information Engineering, Harbin University, Harbin 150080, China)

Abstract: We firstly prove the higher integrability of the composite operator $T \circ D \circ G$ by using Poincaré-Sobolev inequalities when $1 < p < n$. Then further consider the case of $p \geq n$ and obtain the higher order norm estimation of composite operators, by which the weighted norm inequality for L^p integrable differential forms is proved.

Keywords: the composite operator; higher integrability; differential forms

0 引言

近年来,随着对微分形式算子理论研究的展开,算子的有界性及其高阶可积性对研究拟正映射和微分形式 A -调和方程理论有十分重要的意义^[1-8]。2009年,Ding等^[9-10]首先对同伦算子与投影算子的复合算子的奇异积分问题进行了研究。之后,Bi等^[11-13]对同伦算子及其复合算子的强 (p, q) 型不等式进行了研究,证明了算子在加权 L^p 空间的有界性。近几年,Y. Xing^[14]、H. Gao^[6-7,15]、

Y. Lu^[16-17]和Y. Tong^[18]等对算子的高阶可积性以及拟线性椭圆方程解的全局可积性进行了研究,取得了一系列丰富的成果。本文的主要目的是研究同伦算子 T 、Dirac 算子 D 和 Green 算子 G 的复合算子 $T \circ D \circ G$ 的高阶可积性,并进一步得到当 $p \geq n$ 时,复合算子的高阶 L^p 范数估计。为了方便,首先介绍一些符号和术语。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界域, $|E|$ 为 E 的 Lebesgue 测度, $n \geq 2$ 。 $\Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 l -形式全体所构成的空间。 $D^l(E, \Lambda^l)$ 表示定义在 E 上的所有可微 l -形式所构成的空间。 $L^p_{loc}(E, \Lambda^l)$ 表示定义在 E 上的系数局部可积的 l -形式全体所

收稿日期: 2021-11-08

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(LH2020A015)。

作者简介: 毕淑娟(1970—),女,博士,副教授;

刘振杰(1969—),男,博士,副教授。

通信作者: 赵鹏飞(1981—),男,硕士,E-mail: pengfeizhao81@163.com。

构成的空间。

1 预备知识

Hodge 星算子定义为

$$*u = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^\sigma u_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}}$$

其中 $j_1 < \dots < j_{n-k}$, $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$ 为 $(1, \dots, n)$ 的全排列, σ 为全排列的逆序数。利用外微分算子 d 和 Hodge 星算子可以定义 Hodge 上微分算子 $d^* = (-1)^{n+1} * d *$, Dirac 算子定义为 $D = d + d^*$ 。

同伦算子 T 为 T. Iwaniec 和 A. Lutoborski 在证明 Poincaré 引理过程中引入的一个重要算子。对每个 $y \in E$, 首先定义一个线性算子

$$k_y: C^\infty(E, \Lambda^l) \rightarrow C^\infty(E, \Lambda^{l-1})$$

为

$$(k_y u)(x; \xi_1, \dots, \xi_{l-1}) = \int_0^1 t^{l-1} u(tx + y - ty; x - y, \xi_1, \dots, \xi_{l-1}) dt$$

定义 1 同伦算子 $T: C^\infty(E, \Lambda^l) \rightarrow C^\infty(E, \Lambda^{l-1})$ 定义为

$$Tu = \int_E \varphi(y) k_y u dy$$

其中 $\varphi \in C_0^\infty(E)$ 且满足 $\int_E \varphi(y) dy = 1$ 。

然后 T. Iwaniec 等研究了同伦算子的 L^p 理论, 将同伦算子的定义拓展到 $T: L_{loc}^1(E, \Lambda^l) \rightarrow L_{loc}^1(E, \Lambda^{l-1})$, 并证明了对所有的 $u \in \Omega_{q,p}(E, \Lambda^l)$, 有如下分解

$$u = dTu + Tdu \quad (1)$$

其中 $\Omega_{q,p}(E, \Lambda^{l-1})$ 表示满足 $u \in L^p(E, \Lambda^{l-1})$ 且 $du \in L^p(E, \Lambda^l)$ 的全体 $(l-1)$ -形式所构成的集合。

对于算子 T 有如下估计式

$$\|T\omega\|_{s,B} \leq C \text{diam}(B) \|\omega\|_{s,B} \quad (2)$$

成立, 其中 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的球, $1 < p < n$ 。关于同伦算子的更多性质可参看文[1], [19]。

令 $u \in D'(E, \Lambda^l)$, l -形式 $u_E \in D'(E, \Lambda^l)$ 定义为

$$u_E = \begin{cases} |E|^{-1} \int_E u(y) dy, & l = 0 \\ dTu, & l = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

定义 2^[2] Green 算子 G 定义为

$$G: C^\infty(E, \Lambda^l) \rightarrow H^\perp \cap C^\infty(E, \Lambda^l)$$

其中 Gu 是 $H^\perp \cap C^\infty(E, \Lambda^l)$ 中满足 Poisson 方程 $\Delta Gu = u - H(u)$ 的唯一解。

如果 $w(x) > 0$ a. e. 且在 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积, 则称 $w(x)$ 为权函数。 $L^p(E, \Lambda^l, w)$ 表示加权的 L^p 空间, 其范数定义为 $\|u\|_{p,E,w} = \left(\int_E |u|^p w(x) dx \right)^{1/p}$ 。1972 年, B. Muckenhoupt^[20] 在研究极大算子的性质时给出了 A_r 权的概念。

定义 3 如果定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的权函数 $w(x)$ 满足

$$\sup_{B \subset E} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(\frac{1}{w} \right)^{\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} < \infty$$

则称 $w(x)$ 在 E 上满足 $A_r(E)$ 条件。

下面的 Poincaré-Sobolev 不等式出现在文[1]中。

引理 1 若 $u \in D'(B, \Lambda^l)$, $du \in L^p(B, \Lambda^{l+1})$, $l = 0, 1, \dots, n$, 则 $u - u_B \in L^{\frac{np}{n-p}}(B, \Lambda^l)$ 且有不等式 $\left(\int_B |u - u_B|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C_p(n) \left(\int_B |du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ 其中 B 为有界凸区域中的任意球体。

引理 2^[2] 设 u 为定义在 E 上的光滑的微分形式, $1 < s < \infty$, 则存在一个与 u 无关而与 s 有关的正常数 $C(s)$, 使得不等式

$$\|dd^*Gu\|_{s,B} + \|d^*dGu\|_{s,B} + \|dGu\|_{s,B} + \|d^*Gu\|_{s,B} + \|Gu\|_{s,B} \leq C(s) \|u\|_{s,B}$$

对所有满足 $B \subset E$ 的球都成立。

设 $\varphi(x)$ 为定义在 $[0, \infty)$ 上的严格增凸函数, $\varphi(0) = 0$, u 为定义在有界域 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上满足对任意 $\lambda > 0$ 及 $\mu(\{x \in E: |u - u_E| > 0\}) > 0$ 都有 $\varphi(\lambda |u| + |u_E|) \in L^1(E, \mu)$ 的微分形式, 其中, μ 为由 $d\mu = w(x) dx$ 定义的 Radon 测度, $w(x)$ 为权函数。可以证明对任意的 $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_E \varphi\left(\frac{1}{2}|u - u_E|\right) d\mu &\leq C_1 \int_E \varphi(a|u|) d\mu \leq \\ C_2 \int_E \varphi(2a|u - u_E|) d\mu \end{aligned} \quad (3)$$

其中 C_1, C_2 为正常数。

2 定理证明

定理 1 设 $u \in L_{loc}^p(E, \Lambda^l)$ 为定义在 E 上的光滑微分形式, $1 < p < n$, D 为 Dirac 算子, G 为 Green 算子, T 为同伦算子, $0 < s < np(n-p)^{-1}$, 则存在与 u 无关, 与 n, s, p 有关的常数 C 使得

$$\|TDGu\|_{s,B} \leq C \|u\|_{p,\sigma B}$$

其中 $B \subset \sigma B \subset E$, σ 为某个大于 1 的常数。

证明:这里将分成两步来完成证明。

1) 如果

$$|\{x \in B; |TDGu - (TDGu)_B| > 0\}| > 0$$

则由引理 1 和引理 2, 有

$$\begin{aligned} & \|TDGu - (TDGu)_B\|_{\frac{np}{n-p}, B} \leq \\ & C_p(n) \|dTDGu\|_{p, B} \leq \\ & C_p(n) \|DG_u - TdDG_u\|_{p, B} \leq \\ & C_p(n) (\|DG_u\|_{p, B} + \|TdDG_u\|_{p, B}) \leq \\ & C_p(n) (\|u\|_{p, B} + C \|dDG_u\|_{p, B}) \leq \\ & C_p(n) (\|u\|_{p, B} + C \|u\|_{p, B}) \leq C \|u\|_{p, B} \end{aligned}$$

在式(3)中取 $\varphi(t) = t^{\frac{np}{n-p}}$, 则有

$$\left(\int_B |TDGu|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{n-p}{np}} \leq$$

$$C \left(\int_B |TDGu - (TDGu)_B|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{n-p}{np}}$$

由 L^p 空间的单调性, 若 $0 < s < np(n-p)^{-1}$, 则

$$\left(\int_B |TDGu|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left(\int_B |TDGu|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{n-p}{np}}$$

$$\text{于是有} \left(\int_B |TDGu|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left(\int_{\sigma B} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2) 假设

$$|\{x \in B; |TDGu - (TDGu)_B| > 0\}| = 0$$

则 $TDGu = (TDGu)_B$ 在 B 上几乎处处成立, 因此 $TDGu$ 为闭形式, 进而 $TDGu$ 为 A -调和方程的解。于是由式(2)和引理 2, 有

$$\|TDGu\|_{p, \sigma B} \leq C \text{diam}(B) \|DG_u\|_{p, \sigma B} \leq$$

$$C |B|^{\frac{1}{n}} \|u\|_{p, \sigma B}$$

又由 Hölder 不等式有

$$\|TDGu\|_{s, B} \leq C |B|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|TDGu\|_{p, \sigma B}$$

故

$$\|TDGu\|_{s, B} \leq C |B|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|u\|_{p, \sigma B}$$

于是定理得证。

定理 2 设 $u \in L^p_{loc}(E, \Lambda^l)$ 是定义在 E 上的一个光滑微分形式, $p \geq n$, T 是同伦算子, D 是 Dirac 算子, G 是 Green 算子。则对于任意的实数 $s > 1$, 有 $TDGu \in L^s_{loc}(E, \Lambda^l)$, 进而存在一个与 u 无关的常数 C 使得,

$$\|TDGu\|_{s, B} \leq C |B|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|u\|_{p, B}$$

其中 $B \subset E$ 为 E 中的任意球。

证明: 首先当 $1 < s \leq p$ 时, 由引理 2 和式(3), 有

$$\|TDGu\|_{s, B} \leq C |B|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|u\|_{p, B}$$

显然成立。

接下来证明当 $s > p$ 时,

$$\|TDGu\|_{s, B} \leq C |B|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|u\|_{p, \sigma B}$$

成立。

假设

$$|\{x \in B; |TDGu - (TDGu)_B| > 0\}| > 0$$

令 $m = sp^{-1}$, 记 $q = mnp/(n + mp)$ 。因为 $n - p \leq 0$, 所以

$$q - p = [p(m(n - p) - n)](n + mp)^{-1} < 0$$

即 $q < p$, 而 $1 < q = mnp/(n + mp) < n$ 。

于是由引理 1、引理 2 和 L^p 空间的单调性, 有

$$\left(\int_B |TDGu - (TDGu)_B|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \leq$$

$$C_2 \left(\int_B |dTDGu|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$C_2 \left(\int_B |DG_u - T(d(DG_u))|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$C_3 \left(\int_B |DG_u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} + C_4 \left(\int_B |T(d(DG_u))|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$C_5 \left(\int_B |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} + C_6 \left(\int_B |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$C_7 |B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_B |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (4)$$

因为 $|\{x \in B; |TDGu - (TDGu)_B| > 0\}| > 0$, 所以若在式(3)中取 $\varphi(t) = t^{\frac{nq}{(n-q)}}$, 则对任意的微分形式 ω , 可得

$$\left(\int_B |\omega|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \leq$$

$$C_8 \left(\int_B |\omega - \omega_B|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \quad (5)$$

在式(5)中用 $TDGu$ 代替 ω , 有

$$\left(\int_B |TDGu|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \leq$$

$$C_9 \left(\int_B |TDGu - (TDGu)_B|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \quad (6)$$

因为 $nq/(n - q) = mp = s$, 再一次利用 L^p 空间的单调性, 式(6)和式(4), 有

$$\left(\int_B |TDGu|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} =$$

$$\left(\int_B |TDGu|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \leq$$

$$C_9 \left(\int_B |TDGu - (TDGu)_B|^{\frac{nq}{(n-q)}} dx\right)^{\frac{(n-q)}{nq}} \leq$$

$$C_{10} |B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_B |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$C_{10} \|B\|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \left(\int_B |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

因此有

$$\|TDGu\|_{s,B} \leq C \|B\|^{\frac{1}{s} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|u\|_{p,B}$$

于是定理得证。

需要指出的是,以往得到的关于同伦算子和 Green 算子的高阶可积性结论均仅对 A -调和方程的解成立,而定理1和定理2的结果表明对于满足一定条件的指数 s, p , 对任意在 E 上局部 L^p 可积的微分 l -形式,复合算子的高阶可积性仍然成立。

3 应用

近年来,关于算子在加权微分形式 L^p 空间有界性问题的研究已取得一些成果,但由于在证明过程中需要用到弱逆 Hölder 不等式,因此关于加权不等式的结论仅对 A -调和方程的解成立。而由定理2,则可得对任意 L^p 可积的微分形式均成立的加权结果。

引理3 如果 $w(x) \in A_r(E)$, 则存在与 w 无关的常数 $\gamma > 1$ 和 $C > 0$, 使得

$$\|w\|_{\gamma,B} \leq C \|B\|^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} \|w\|_{1,B} \quad (7)$$

对所有球 $B \subset E$ 都成立。

定理3 设 E 为有界凸区域, $n < p < \infty$, T 为同伦算子, D 为 Dirac 算子, G 为 Green 算子, 如果权函数 $w(x)$ 满足 $A_r(E)$ 条件, 其中 $1 < r < p/n$, 则对任意 $u \in L^p(E, \Lambda^l)$, 存在与 u 无关的常数 C 使得

$$\|TDGu\|_{p,B,w} \leq C \|u\|_{p,B,w}$$

对所有的球 $B \subset E$ 都成立。

证明: 由于 $w(x)$ 满足 $A_r(E)$ 条件, 由引理3, 存在常数 $\gamma > 1$ 和正数 C_1 使得对所有的球 $B \subset E$ 有

$$\|w\|_{\gamma,B} \leq C_1 \|B\|^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} \|w\|_{1,B}$$

取 $t = \gamma p / (\gamma - 1)$, 则由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} \|TDGu\|_{p,B,w} &\leq \left(\int_B |TDGu|^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_B w^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma p}} = \\ \|TDGu\|_{t,B} \|w\|_{\frac{p}{\gamma}, B} \end{aligned} \quad (8)$$

这样, 将式(7)代入式(8)中, 有

$$\|TDGu\|_{p,B,w} \leq C_2 \|B\|^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} \|TDGu\|_{t,B} \|w\|_{\frac{p}{\gamma}, B} \quad (9)$$

记 $m = p/r$, 则由定理2可以得到

$$\|TDGu\|_{t,B} \leq C_3 \|u\|_{m,B} \quad (10)$$

其中 C_3 与 t, m, n 有关。再由式(9)和式(10), 有

$$\|TDGu\|_{p,B,w} \leq C_4 \|B\|^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma p}} \|u\|_{m,B} \|w\|_{\frac{p}{\gamma}, B}$$

又由于 $1/p + (r-1)/p = 1/m$, 于是由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,B} &\leq \left(\int_B (|u|^{\frac{1}{w^p}})^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B \left(\frac{1}{w} \right)^{\frac{r-1}{r-1}} dx \right)^{\frac{p}{r-1}} = \\ \|u\|_{p,B,w} \left(\int_B \left(\frac{1}{w} \right)^{\frac{r-1}{r-1}} dx \right)^{\frac{p}{r-1}} \end{aligned} \quad (11)$$

注意到 $w \in A_r(E)$, 因此存在常数 $C_5 > 0$ 使得对所有的球 $B \subset E$, 有

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(\frac{1}{w} \right)^{\frac{1}{(r-1)}} dx \right)^{\frac{(r-1)}{p}} < C_5 < \infty$$

这样, 再由式(10)和式(11), 立即可有

$$\begin{aligned} \|TDGu\|_{p,B,w} &\leq \\ C_6 \|B\|^{\frac{1-\gamma}{r\gamma}} \|B\|^{\frac{1}{p}} \|B\|^{\frac{r-1}{p}} \|u\|_{p,B,w} = \\ C_6 \|B\|^{\frac{r}{p} + \frac{1-\gamma}{r\gamma}} \|u\|_{p,B,w} &\leq \\ C_6 \|D\|^{\frac{r}{p} + \frac{1-\gamma}{r\gamma}} \|u\|_{p,B,w} &\leq \\ C_7 \|u\|_{p,B,w} \end{aligned}$$

结论得证。

4 结论

本文证明了微分形式 L^s 空间同伦算子 T 、Green 算子和 Dirac 算子的复合算子 $T \circ D \circ G$ 当 $1 < p < n$ 时的高阶可积性, 并进一步证明了复合算子当 $p \geq n$ 时的高阶范数估计以及对 L^p 可积微分形式成立的局部加权范数不等式。

参考文献:

- [1] IWANIEC T., LUTOBORSKI A. Integral Estimates for Null Lagrangians [J]. Arch. Ration. Mech. Anal., 1993, 125(1): 25.
- [2] SCOTT C. Theory of Differential Forms on Manifolds [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(6): 2075.
- [3] 毕卉, 于冰, 李贯锋. 复合算子的 Lipschitz 和 BMO 范数不等式 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2017, 34(5): 556.
- BI Hui, YU Bing, LI Guanfeng. Lipschitz and BMO Norm Inequalities for the Composite Operator [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2017, 34(5): 556.
- [4] AGARWAL R. P., DING Shusen, NOLDER C. Inequalities for differential Forms [M]. Springer, 2009.
- [5] 高红亚, 褚玉明. 拟正则映射与 A -调和方程 [M]. 北

- 京:科学出版社,2013.
- [6] GAO Hongya, HUANG Miaomiao, DENG Hua, et al. Global Integrability for Solutions to Quasilinear Elliptic Systems[J]. *Manuscripta Mathematica*, 2021, 164: 23.
- [7] GAO Hongya, HUANG Miaomiao, REN Wei. Global Regularity for Minimizers of Some Anisotropic Variational Integrals[J]. *J. Optimization Theory and Applications*, 2021, 188(2): 523.
- [8] NOLDER C. Global Integrability Theorems for A-harmonic Tensors[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 247(1): 236.
- [9] DING Shusen, LIU Bing. A Singular Integral of the Composite Operator[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2009, 22(8): 1271.
- [10] DING Shusen, LIU Bing. Dirac-harmonic Equations for Differential Forms [J]. *Nonlinear Analysis*, 2015, 22: 43.
- [11] BI Hui, XING Yuming. Poincare-type Inequalities with $L_p(\log L)$ -norms for Green's Operator[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 60(10): 2764.
- [12] BI Hui, DING Shusen. Some Strong (p, q) -type Inequalities for the Homotopy Operator[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 62(4): 1780.
- [13] BI Hui, SUN Yuli. Imbedding Inequalities for the Composite Operator in the Sobolev Spaces of Differential Forms[J]. *J. Inequalities and Applications*, 2015, 2015(1): 1.
- [14] XING Yuming, DING Shusen. Higher Integrability of Green's Operator and Homotopy Operator[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, 446(1): 648.
- [15] GAO Hongya, LIANG Shuang, CHI Yi. Global Integrability Related to Anisotropic Operators [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 442(1): 244.
- [16] LU Yueming, LIAN Pan. Variational Integral and Some Inequalities of a Class of Quasilinear Elliptic System[J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2020, 30(4): 62.
- [17] LU Yueming. On Weak Solutions to Dirac Harmonic Equations for Differential Forms[J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2017, 27(4): 3167.
- [18] TONG Yuxia, LIANG Shuang, ZHENG Shenzhou. Integrability of Very Weak Solution to the Dirichlet Problem of Nonlinear Elliptic System [J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019, 2019(1): 1.
- [19] GOL'DSHTEIN V., TROYANOV M. Sobolev Inequalities for Differential Forms and L_q, p -cohomology [J]. *Journal of Geometric Analysis*, 2006, 16(4): 597.
- [20] MUCKENHOUT B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy-Littlewood Maximal Operator[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1972, 165: 207.

(编辑:温泽宇)